Numerické řešení rovnice

Numerické hledání řešení

Pro optimalizaci matematických úloh (hledání kořenů lineárních i nelineárních rovnic, hledání maxima a minima funkce) slouží kromě standardních analytických metod také metody numerické.

- **Hledání maxima a minima funkce**

  Hledání maxima a minima funkce je v principu totožné. Obvykle se jedná o nalezení pouze polohy extrému, proto je možné funkci vynásobit číslem -1. Hodnota se nezmění funkce se pouze osově souměrně otočí podle osy x.

- **Numerickým řešením rovnice** se obecně rozumí „přibližný“ výpočet všech hodnot nezávisle proměnné *x* pro něž je splněna rovnost levé a pravé strany rovnice.

Numerické řešení rovnice

K **numerickému řešení** přistupujeme, pokud kořeny nelze vyjádřit pomocí běžných matematických úprav, nebo nepožadujeme absolutní přesnost.

Numerické řešení nelineárních rovnice patří k důležitým problémům, se kterým se technologové a inženýři často potkávají.

Nelineární rovnice se vyskytují např. ve:
-výpočtech rovnovážných stavů reálných systémů,
-výpočtech stavového chování reálných tekutin atd.

Existují **různé numerické metody** pro nalezení řešení, které můžeme dále dělit (stacionární x nestacionární, jednobodové, dvoubodové x vícebodové), např.:
-metoda půlení intervalu
-regula falsi

Úprava rovnice do požadovaného tvaru

Obecně, řešíme-li nějakou rovnici (hledáme všechny její kořeny), mnoho metod požaduje nejprve **úpravu rovnice do požadovaného tvaru *f(x)=0***.

Např. rovnice

$$x^3 - 4{,}56 \cdot x = 3{,}12 \cdot x^2 - 13{,}1$$

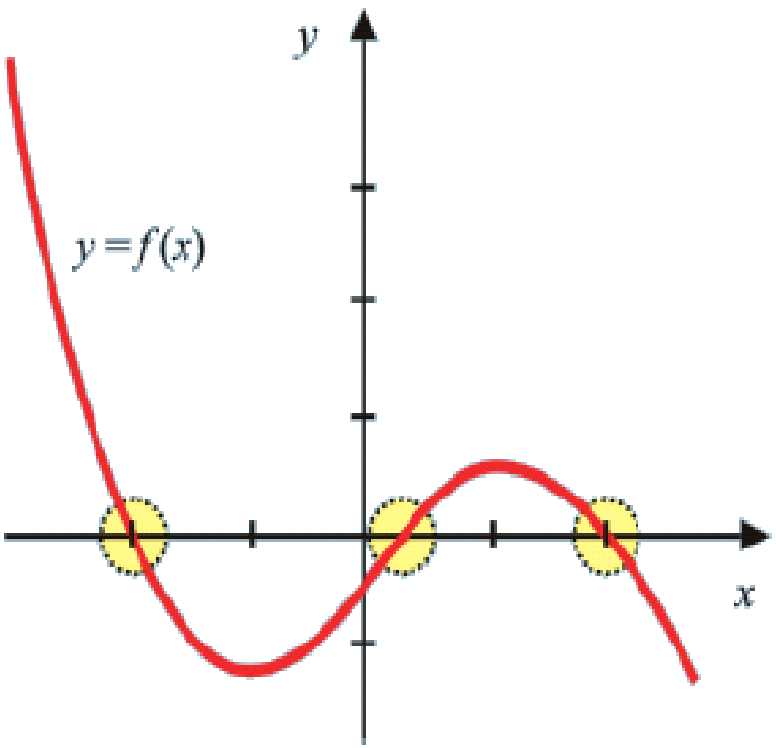
je převáděna na tvar

$$\underbrace{x^3 - 3{,}12 \cdot x^2 - 4{,}56 \cdot x + 13{,}1}_{f(x)} = 0$$

Nalezení separačních intervalů

Mnohé numerické metody umí nalézt kořen nebo extrém pouze na malém intervalu s „hezkým chováním“ vyšetřované funkce.

Grafické znázornění funkce (separace kořenů): Po vykreslení funkce do grafu jsou kořeny rovnice průsečíky s osou x. Můžeme tak ale také určit i úzké intervaly (**separační intervaly**), kde se nachází již pouze jeden kořen a funkce se tam výrazně nemění.



Newtonova metoda

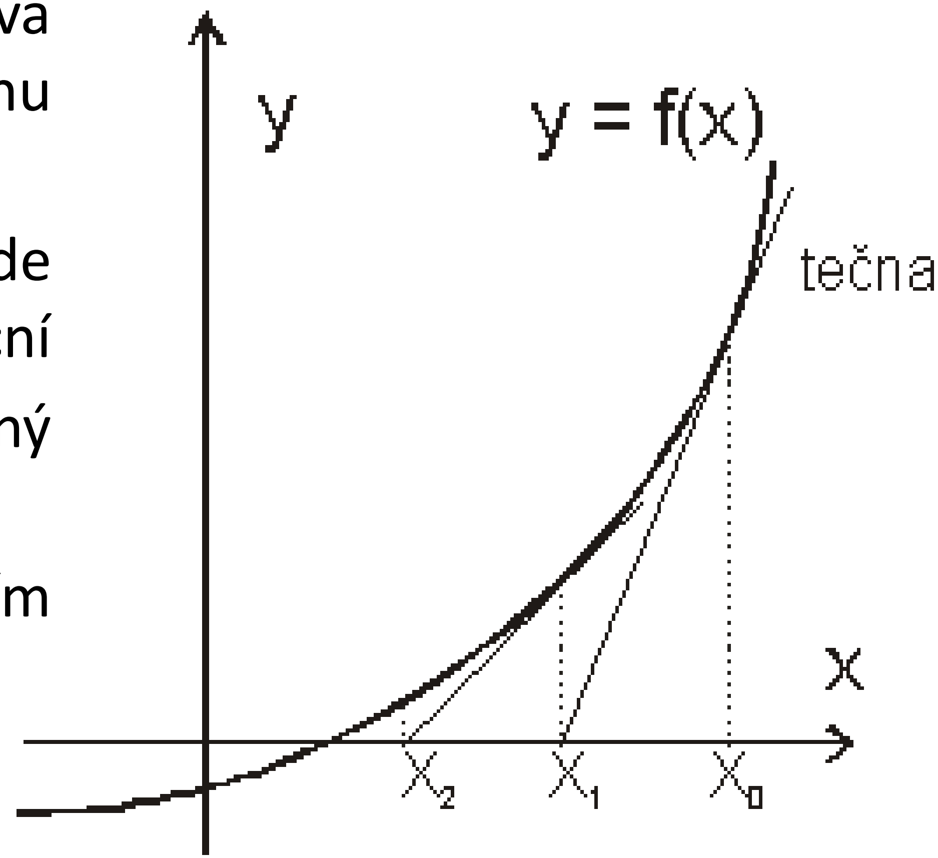
Newtonova metoda

Newtonova metoda využívá pro výpočet kořene rovnice tečnu v daném bodě.

Protnutím tečny s osou x dojde k vylepšení aktuální funkční hodnoty ($\rightarrow 0$), ve které je možný další výpočet tečny.

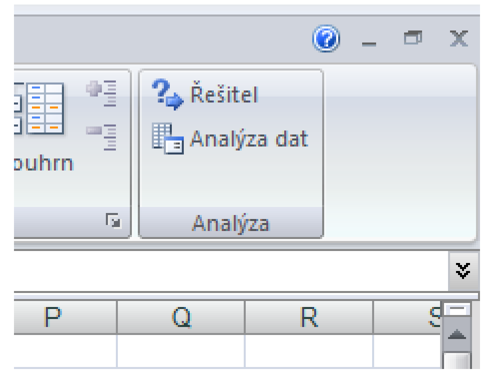
Metodu lze vyjádřit rekurentním vztahem

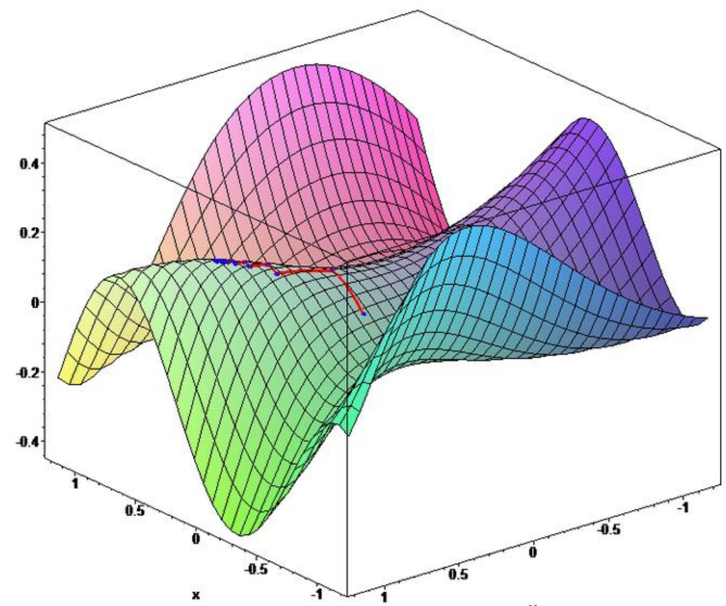
$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$



Metoda GRG Nonlinear (modul MS Office Řešitel)

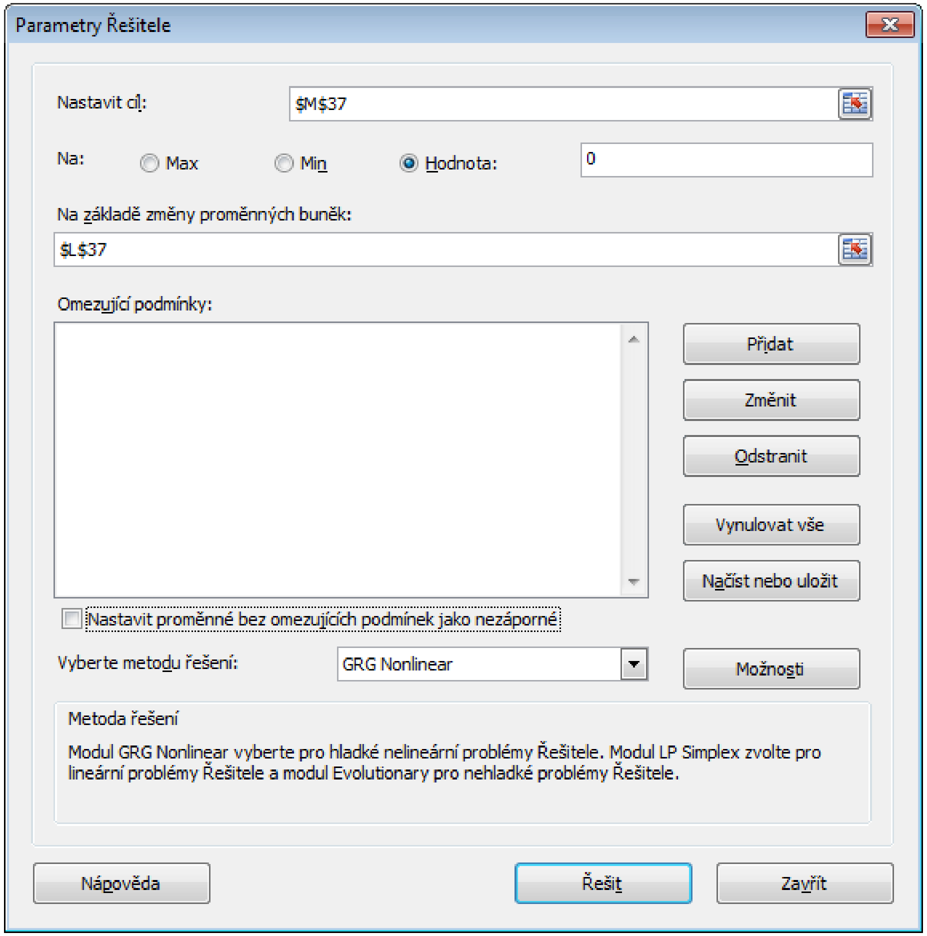
- implementována v doplňku
- MS Office – Řešitel
- umožňuje řešit i optimalizační problémy více než jedné proměnné
- pro hledání minima, maxima vícerozměrné funkce s existující derivací
- pro hledání konkrétní hodnoty vícerozměrné funkce



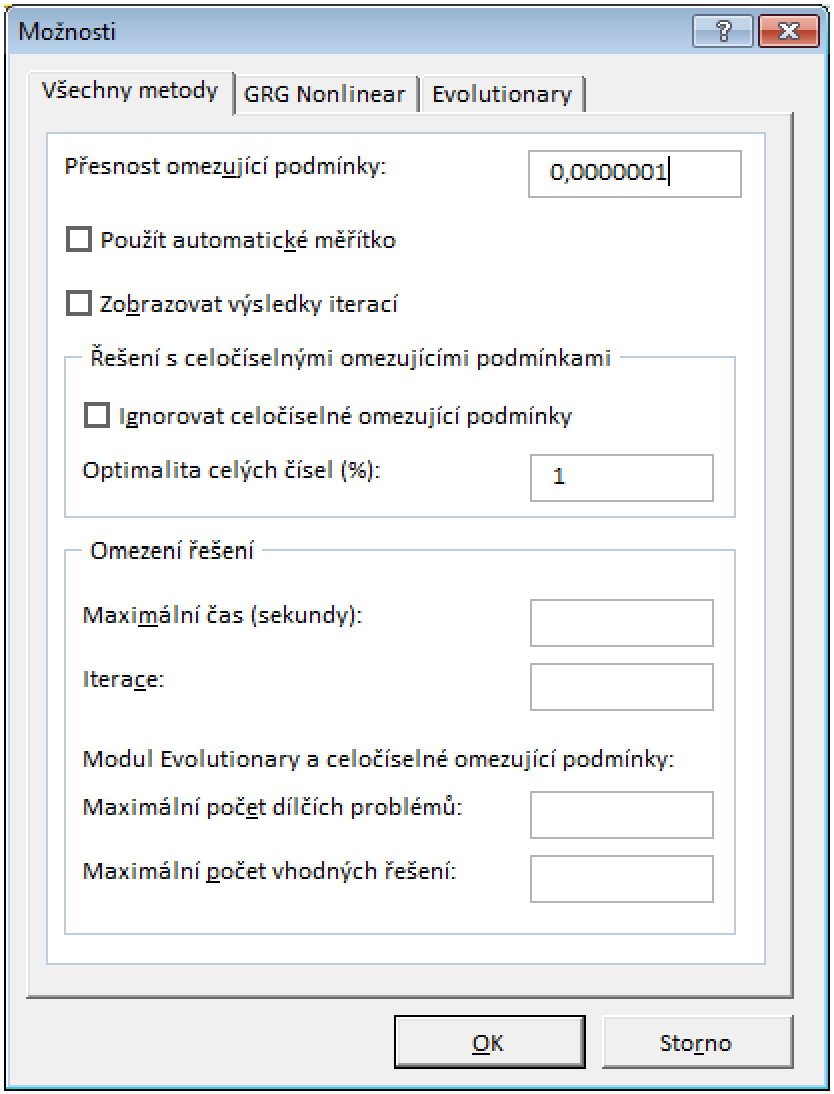


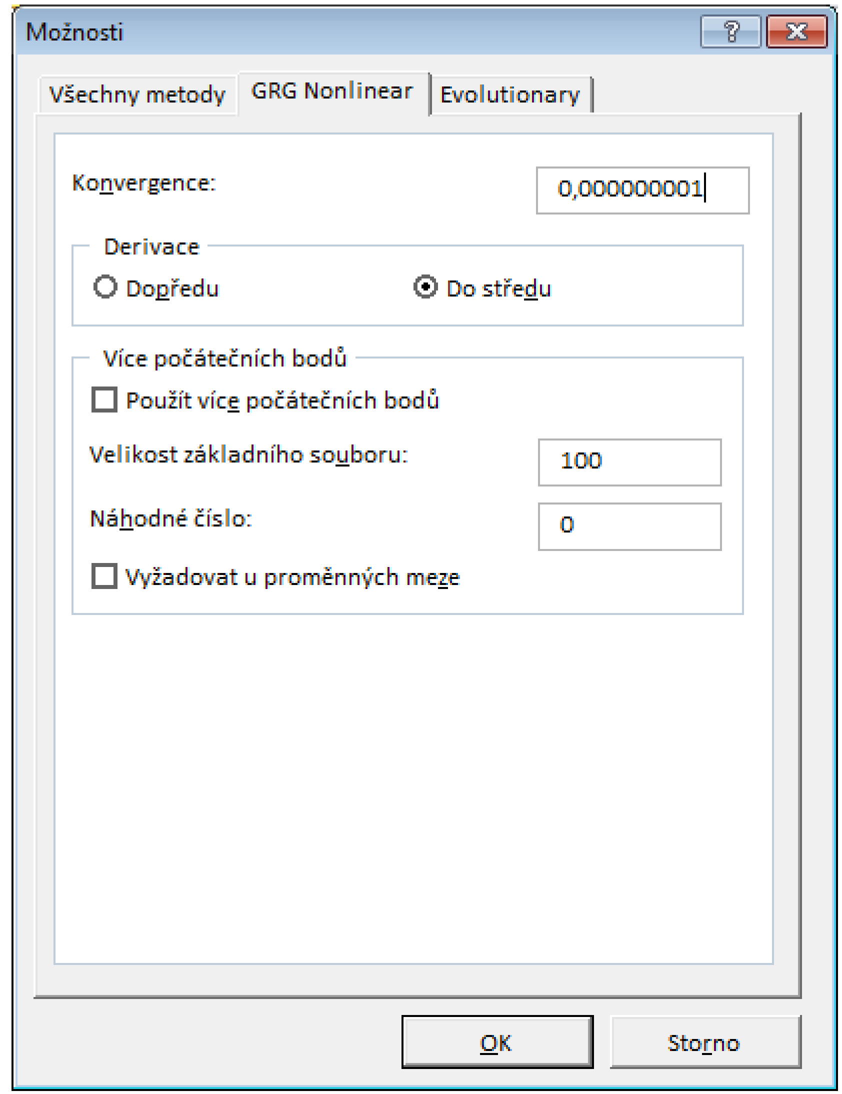
zdroj:http://en.wikipedia.org/wiki/File:Gradient_ascent_(surface).png

Metoda GRG Nonlinear (MS Office 2010 Řešitel)

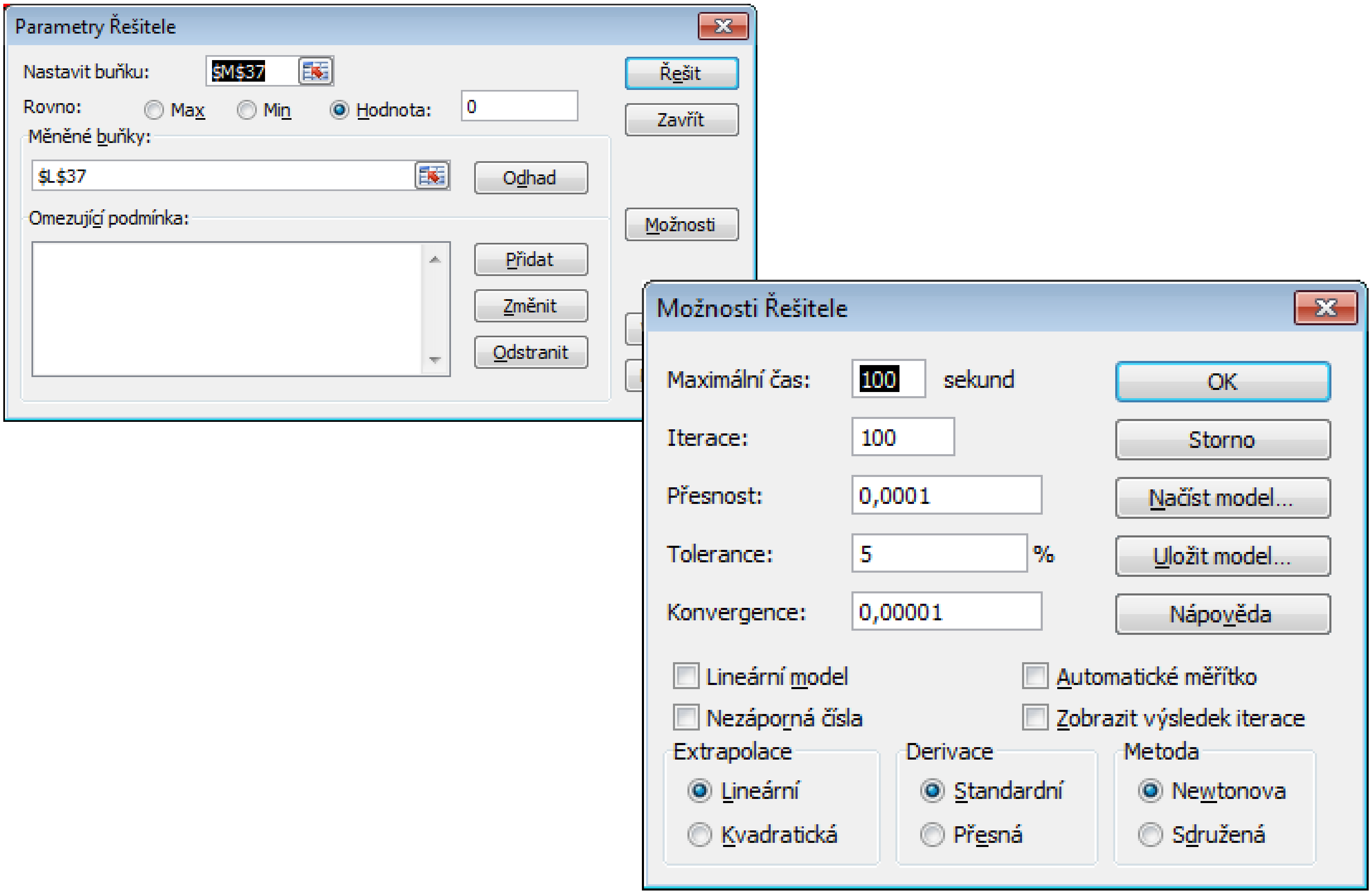


Metoda GRG Nonlinear (MS Office 2010 Řešitel)





Metoda GRG Nonlinear (MS Office 2007 Řešitel)

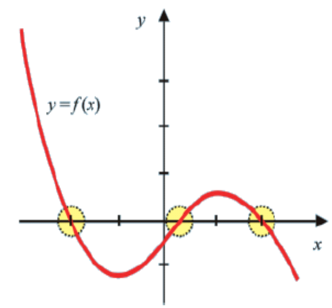


Numerické řešení rovnice

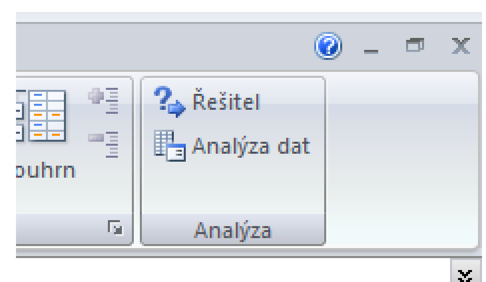
3 kroky pro nalezení řešení Řešitelem v Excelu:

1) upravit rovnici do **požadovaného tvaru** $f(x) = 0$

2) tabelovat (vyčíslit) funkci na požadovaném intervalu a najít **separační intervaly**



3) zvolit **hodnotu nástřelu** x_0 a napsat jí do „Měněné buňky“. Napsat **vzorec počítající f(x)** (levou stranu rovnice) do “Cílové buňky (Nastavit cíl)“. Spustit Data →Analýza →Řešitel

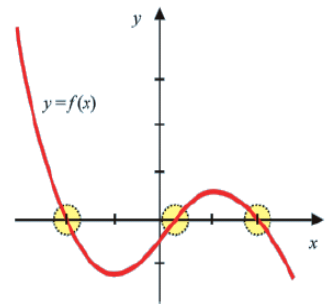


Numerické řešení rovnice

3 kroky pro nalezení řešení Newtonovou metodou v Excelu:

1) upravit rovnici do **požadovaného tvaru** $f(x) = 0$

2) tabelovat (vyčíslit) funkci na požadovaném intervalu a najít **separační intervaly**



3) zvolit **hodnotu nástřelu** x_0 a aplikovat **vzorec konkrétní numerické metody.**
Pro Newtonovu metodu:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$